

Die oplossing van differensiaalvergelykings deur 'n ultrasferiese spektrale element-metode

EA Nel, N Hale

Departement Toegepaste Wiskunde, Stellenbosch Universiteit, Suid-Afrika

Korresponderende outeur: Emma Nel E-pos: eanel@sun.ac.za

Solving differential equations using an ultraspherical spectral element method: This research investigates techniques for solving second-order elliptic ordinary and partial differential equations with variable coefficients on one- and two-dimensional domains. We combine Galerkin type spectral methods with domain decomposition strategies, specifically the hierarchical Poincaré-Steklov (HPS) method, to solve on domains with interesting geometries.

Gewone en parsiele differensiaalvergelykings (GDV en PDV) is 'n kragtige instrument wat deur wetenskaplikes en ingenieurs gebruik word om die gedrag van stelsels wat oor tyd verander te beskryf, soos die beweging van 'n vallende voorwerp of die verspreiding van 'n siekte. Hierdie vergelykings het tipies nie geslote-vorm oplossings nie en vereis numeriese metodes vir oplossing.

Ons navorsing fokus op die gebruik van spektrale metodes in kombinasie met gebiedontbindingstrategieë om tweede-orde elliptiese GDVs en PDVs met veranderlike koëffisiënte in een- en twee-dimensionele gebiede op te los.

Ons benadering maak gebruik van 'n Galerkin-tipe spektrale metode waarin die gebied gediskretiseer word deur 'n reeks basisfunksies wat oor die oplossingsruimte strek. Ons kies die ultrasferiese polinome as basisfunksies, aangesien hulle ortogonaal is en eenvoudige operatore oplewer. Die oplossing word benader deur die som van hierdie basisfunksies, elk vermenigvuldig met 'n koëffisiënt. Spektrale metodes het die voordeel van geometriese konvergensie, maar is tradisioneel tot reghoekige gebiede beperk.

Die beperking tot reghoekige gebiede kan egter oorkom word deur onlangse ontwikkelinge in gebiedontbindingstrategieë. Gebiedontbinding behels die opdeling van 'n groot gebied in kleiner subgebiede. Die krag van gebiedontbinding lê in die omskakeling van 'n groot, onpraktiese probleem in 'n reeks kleiner probleme wat onafhanklik opgelos kan word, selfs in parallel. Ons maak spesifiek gebruik van die hiërgiesse Poincaré-Steklov-metode (HPS) vir hierdie doel.

Die HPS-metode is 'n doeltreffende algoritme wat die oplossing van groot lineêre sisteme gegenereer deur spektrale metodes moontlik maak. Dit werk deur oplossings by die grens tussen verskillende subgebiede te verbind deur die gebruik van twee tipes operatore. Hierdie operatore verseker dat die oplossings, en hulle afgeleides, oor die gebiedgrense ooreenstem en dat die lokale oplossings saamgeweef kan word vir 'n oplossing op die globale gebied.

Hierdie navorsing stel ons in staat om spektrale metodes uit te brei na meer ingewikkelde geometrieë, insluitend reghoekige gebiede wat sirkelvormige gapings bevat. Hierdie konfigurasie is nuttig in verskeie toepassings, soos die simulatie van vloeistofvloeie om sirkelvormige hindernisse en die berekening van spanningsverspreidings in geperforeerde plate. Ons het 'n transformasie ontwikkel wat die nuwe gebied na 'n verwysingsvierkant omskakel, wat dit moontlik maak om die ultrasferiese spektrale metode op die nuwe gebied toe te pas. Hierdie transformasie is geïmplementeer in 'n bestaande sagtewarestelsel, bekend as *ultraSEM* (Fortunato et al., 2020a), wat geskryf is om tweede-orde GDVs en PDVs op vierhoeke op te los (Fortunato et al., 2020b).

Die kombinasie van spektrale metodes en gebiedontbindingstrategieë blyk 'n belowende benadering bied om tweede-orde GDVs en PDVs op te los, selfs in geometrieë met uitdagende vorms. Die toepaslikheid van hierdie metode word aangetoon deur praktiese probleme van ingenieurswese op te los. Hierdie navorsing ontwikkel nuwe gereedskap vir numeriese methods om komplekse differensiaalvergelykings op te los, met 'n wye reeks toepassings in die wetenskap en ingenieurswese.

Nota: 'n Seleksie van referaatopsommings: Studentesimposium in die Natuurwetenskappe, 23-24 Oktober 2023, Universiteit van Pretoria. Reëlingskomitee: Prof Rudi Pretorius (Departement Geografie, Universiteit van Suid-Afrika); Dr Hertzog Bisset (Suid-Afrikaanse Kernenergie-korporasie); Dr Jean van Laar (Sentrum vir Navorsing en Voortgesette Ingenieursontwikkeling, Noordwes-Universiteit); Prof Marilé Landman, Dr Danie Pienaar en Dr Frikkie Malan (Departement Chemie, Universiteit van Pretoria); Mnr JW Hurter (Departement Plant- en Grondwetenskappe, Universiteit van Pretoria).

Verwysings

Fortunato, D., Hale, N., Townsend, A., 2020a, GitHub repository, ultraSEM. Besikbaar by: <https://github.com/danfortunato/ultraSEM>. Toegang: 31 Julie 2023.

Fortunato, D., Hale, N., Townsend, A., 2020b, The ultraspherical spectral element method, *Journal of Computational Physics* 436, 110087. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110087>.